

# Statistische Physik

Hausübung, Blatt 11

WiSe 2018/19

Abgabe: 17.1.2019

---

[H20] Van-der-Waals-Gas

(5 Punkte)

Betrachten Sie ein Van-der-Waals-Gas mit fester Teilchenzahl  $N$ .

- (a) Drücken Sie die Entropie  $\sigma$  des Gases als Funktion des Volumens  $V$  und der Temperatur  $\tau$  aus. (Benutzen Sie die Quantenkonzentration  $n_Q$ .)
- (b) Drücken Sie die Gesamtenergie  $U$  ebenfalls als Funktion von  $V$  und  $\tau$  aus.
- (c) Drücken Sie die Enthalpie  $H = U + pV$  sowohl als Funktion von  $\tau$  und  $V$  aus, als auch als Funktion von  $\tau$  und dem Druck  $p$ . Beschränken Sie sich in beiden Fällen auf Terme erster Ordnung in den Parametern  $a$  und  $b$ .

Bitte wenden

**[H21] Phasenübergang erster Ordnung im Kristall****(7 Punkte)**

Betrachten Sie einen Kristall, dessen Struktur sich in zwei möglichen Phasen  $\alpha$  und  $\beta$  befinden kann. Bei niedrigen Temperaturen sei die  $\alpha$ -Phase stabil, bei hohen Temperaturen die  $\beta$ -Phase. Die Energiedichte hat einen temperaturabhängigen elastischen Anteil  $U_{\text{el}}(\tau)$  und einen konstanten Nullpunktsanteil  $U(0)$ . Beide Anteile sind phasenabhängig. Der elastische Anteil besteht aus Anregungen akustischer Moden (Phononen). Am Temperaturnullpunkt ist die elastische Energiedichte gleich Null:  $U_{\text{el}}(0) = 0$ .

Der Energienullpunkt sei gegeben durch den Zustand, bei dem alle Atome unendlich weit separiert sind. Die Energiedichte  $U(0)$  bei  $\tau = 0$  ist dann negativ. Bei  $\tau = 0$  ist die stabile Phase diejenige geringerer Energiedichte, also ist  $U_{\alpha}(0) < U_{\beta}(0)$ .

*Bemerkung:* Kleinere Schallgeschwindigkeiten gehen mit geringeren Elastizitätsmoduln einher und bedingen größere Amplituden der thermischen Anregungen. Im vorliegenden Modell hat die  $\beta$ -Phase die geringere Schallgeschwindigkeit. Bei stärkerer thermischer Anregung ist die Entropie größer und die freie Energie geringer. Weiche Systeme sind typischerweise bei hohen Temperaturen stabil, harte Systeme bei geringen Temperaturen.

- (a) Bei Temperaturen weit unter der *Debye-Temperatur*  $\theta$  beträgt die Energiedichte  $U$  von Phononen

$$U = c\tau^4, \quad c = \frac{3\pi^4}{5(k_{\text{B}}\theta)^3} \frac{N}{V}, \quad \theta = \frac{\hbar v}{k_{\text{B}}} \left(6\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi^2}{10\hbar^3 v^3}. \quad (1)$$

Hierbei ist  $v$  die Schallgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass die Dichte  $F_{\text{el}}$  der freien Energie von Phononen in einem Festkörper bei Temperaturen weit unterhalb der Debye-Temperatur  $-\pi^2\tau^4/(30\hbar^3v^3)$  beträgt. Verwenden Sie die obige Debye-Näherung, mit Geschwindigkeit  $v$  für alle Phononen.

- (b) Zeigen Sie, dass für die Übergangstemperatur  $\tau_c$  zwischen den beiden Phasen gilt

$$\tau_c^4 = \frac{30\hbar^2}{\pi^2} \frac{U_{\beta}(0) - U_{\alpha}(0)}{v_{\beta}^{-3} - v_{\alpha}^{-3}}. \quad (2)$$

Die Gleichung hat eine endliche reelle Lösung, falls  $v_{\beta} < v_{\alpha}$ . Dieser vereinfachte Zusammenhang modelliert eine Klasse tatsächlicher Phasenübergänge in Festkörpern.

- (c) Die latente Wärme eines Phasenübergangs ist die thermische Energie, die aufgewendet werden muss, um den Phasenübergang zu vollziehen. Zeigen Sie, dass für die latente Wärme  $L$  in diesem Modell gilt:

$$L = 4(U_{\beta}(0) - U_{\alpha}(0)). \quad (3)$$

*Hinweis:* Da es sich um einen Festkörper handelt, können Sie eine mögliche Änderung der Teilchendichte oder des Drucks zwischen den beiden Phasen vernachlässigen.